Minule: • V o pevném bodě

• subvalence $\preccurlyeq$, ekvipotence $\approx$

[$A \preccurlyeq B \iff$ ex. $f: A \to B$ prosté]

[$A \approx B \iff$ ex. bijekce]

• Cantor-Bernstein: $(\forall x)(\forall y) \dots$

$\dots x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \longrightarrow x \approx y$

Dk: • Šikovně zvolené $H: P(x) \longrightarrow P(x)$

• $(P(x), \subseteq)$ je úplný svaz

• H má pevný bod $u \subseteq x$

• $h: x \to y$ bijekce se def. pomocí u.

Kardinální čísla: popisují počet prvků.

Ordinální čísla: popisují pořadí.

$\mathbb{N}$ se dá chápat oběma způsoby

↳ počty prvků / pořadí v konečných množinách.

lze chápat n jako třídu $\approx$-ekviv na všech konečných množinách, a to všech n-prvkových množin.

$\mathrm{Fin} = \{x : x$ je konečná množina$\}$

$\mathrm{Fin}/_{\approx} \cong \mathbb{N}$.

Jak tedy opravdu def. jednotlivá přirozená čísla v teorii množin?

HESLO: „Všechno je množina"

Von Neumann

- $0 := \emptyset$

- $0 := \emptyset$ (nula prvků)
- $1 := \{0\}$ (jeden prvek)
- $2 := \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (dva prvky)
- $3 := \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

atd.

$n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

rekurzivní definice; jsme schopni „generovat" libovolně vysoká př. čísla.

„POTENCIÁLNÍ ∞".

Co ale množina $\mathbb{N}$?

„AKTUÁLNÍ ∞".

AXIOMATICKÁ TEORIE

- logika – pravidla odvozování (– relace =)
- primitivní pojmy (množina / číslo / bod)
- axiomy: výroky přijaté za platné bez důkazu.

$A \leftrightarrow A$

Typické pravidlo odvozování $(A \to B \wedge B \to A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$

MODUS PONENS:

$$\frac{\begin{array}{c} A \longrightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

$\rightsquigarrow ((A \to B) \wedge A) \to B$

tautologie výrokového počtu.

[TAUTOLOGIE]

PEANOVY AXIOMY: Prim. pojem: přir. č.

(1) 0 je přirozené číslo $(0 \in \mathbb{N})$

„operace"

(2) $(\forall x): \; x = x$

(3) $(\forall x)(\forall y) \; x = y \rightarrow y = x$

(4) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

(5) $(\forall a)(\forall b) \; (b \in \mathbb{N} \wedge a = b) \rightarrow a \in \mathbb{N}$

(6) $(\forall n): \; S(n) \in \mathbb{N}$ (funkce násl.)

(7) $(\forall m)(\forall n): \; m = n \leftrightarrow S(m) = S(n)$

(8) $(\forall n): \; \neg(S(n) = 0)$ (nula není násl.)

(9a) $(\forall K \subseteq \mathbb{N}): \; 0 \in K \wedge ((\forall n): n \in K \rightarrow S(n) \in K)$

$\rightarrow K = \mathbb{N}.$ (ax. o indukci)

(9b) Pro každou formuli $\varphi(n)$

(s jedinou volnou proměnnou n)

$$\Big(\varphi(0) \wedge \big((\forall n): \varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n))\big)\Big) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\forall n)\, \varphi(n).$$

Logika 1. řádu: • kvantifikace přes prvky

2. řádu: • kvant. přes množiny prvků, resp. třídy, resp. výroky.

Pozn: (9a) / (9b) jsou výroky 2. řádu.

$x = y$ $\quad 7 \rightarrow y$, $5 \rightarrow x$: $5 = 7$ ✗

Zavádění operací: Rekursivní definice:

<u>Sčítání</u>: • $a + 0 = a$, $a \in \mathbb{N}$

• $a + S(b) = S(a+b)$

$5 + 2 = ?$ $\quad a := 5$

• $5 + 0 = 5$

• $5 + S(0) = S(5+0) = S(5)$

• $5 + S(S(0)) = S(5 + S(0)) = S(S(5))$

$$5 + \underbrace{S(S(0))}_{2} = \underbrace{S(S(5))}_{7}$$

• $0 = 0$

• $1 = S(0)$

• $2 = S(1) = S(S(0))$

$7 = S(S(S(S(S(S(S(0)))))))$

(„unární zápis čísel")

<u>Násobení</u>: • $a \cdot 0 = 0$

• $a \cdot S(b) = a \cdot b + a$

$\cancel{a \cdot (b+1) = (a+1)b}$

$[\, a \cdot (b+1) = ab + a \,]$

<u>Věta</u>: komut., asociativní, distributivní..

<u>Důkaz</u>: Indukcí.

$c(a+b) = ca + cb$ $\quad$ máme z def.: $c(a+1) = ca + c$

• Jazyk matematiky × metajazyk

↳ posl. formálních symbolů (zbavených smyslu)

[interpretace stojí samostatně]

metajazyk – čeština.

Jazyk teorie množin: • obsahuje symboly:

(i) proměnné: $x, y, \dots X, Y, \alpha, \beta, \dots, \mathcal{H}$

(ii) $=$

(iii) $\in$

[(v logice: $x = y$ znamená, že platí tytéž pravdy)]

(iv) logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(V) $\forall$, $\exists$ (kvantifikátory)

(Vi) pomocné symboly: závorky, drojtečka ...

• Syntaktická pravidla ⇝ formule:

Metadefinice: (i) $x = y$, $x \in y$ jsou formule (JTM), tzv. atomické.

(ii) φ, ψ formule, pak $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou formule.

(iii) x prom., φ formule, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou fle.

Každá formule vznikne konečným počtem aplikací (i)—(iii)

$(\forall \alpha)\left(\neg(\underline{x \in y} \wedge \underline{z \in x}) \vee y \in x\right)$.